PROSEMINAR ALGEBRA WS 2014

Die mit ^{s} gekennzeichnete Aufgabe ist schriftlich auszuarbeiten und nächsten Dienstag im Proseminar abzugeben. Aufgaben mit * sind etwas anspruchsvoller.

1 (a) Finde vier Untergruppen der Permutationsgruppe S_4.

(b) Welche sind Normalteiler?

2 (a) Finde zwei endliche und zwei unendliche Untergruppen der $\mathrm{GL}_4(\mathbb{C})$.

(b) Beschreibe ihre Eigenschaften (kommutativ, normal, Ordnung, ...).

3^s (a) Finde einen (möglichst interessanten) Gruppenhomomorphismus zwischen einer additiven und einer multiplikativen Gruppe, der ein Isomorphismus ist, sowie einen, der es nicht ist.

(b) Bestimme im ersten Fall die Umkehrabbildung, im zweiten Fall Kern und Bild.

4 Wieviele Elemente hat die kleinste Untergruppe der Gruppe A_5 der alternierenden Permutationen, die die Permutation $(1\,2)(1\,3)$ enthält?

5 Sei G die Menge der zwölften Einheitswurzeln in $\mathbb{C}$, also $G = \{\xi \in \mathbb{C},\ \xi^{12} = 1\}$.

(a) Zeige: G bildet eine kommutative Gruppe bzgl. der natürlichen Verknüpfung.

(b) Vergleiche G mit $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ und $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$.

(c) Bestimme alle Erzeugendensysteme von G.

(d) Bestimme geometrisch die Summe aller Elemente von G.

6* (a) Es seien X, Y und Z drei Mengen mit gegebenen Abbildungen $f : X \to Z$ und $g : Y \to Z$. Beschreibe die universelle Eigenschaft des Faserproduktes $X \times_Z Y$ von X mit Y über Z,

$$X \times_Z Y = \{(x, y) \in X \times Y,\ f(x) = g(y)\}.$$

(b) Interpretiere die Fasern $V_w = \{v \in V,\ h(v) = w\}$ von Elementen $w \in W$ und die Urbilder $h^{-1}(U)$ von Teilmengen $U \subset W$ einer Abbildung $h : V \to W$ als Faserprodukt.